Beispiel 3.5.3.

$$f(x) = \frac{2x^2+5}{2x-1} \Rightarrow f(0) = \frac{2\cdot 0^2+5}{2\cdot 0-1} = \frac{5}{-1} = -5$$

3.6 Verhalten an den Polstellen

Die Polstellen teilen den Graph in mehrere Teile. Da der entsprechende x-Wert eine Definitionslücke darstellt, kann der Graph durch diese Stellen nicht hindurch verlaufen. Sie stellen also unüberwindbare Hindernisse dar. Das Verhalten eines Graphen an einer Polstelle x_P kann zwei verschiedene Ausprägungen haben: Entweder verläuft der Graph ins positive Unendliche oder ins negative Unendliche.

Kriterium 3.6.1.
Welches Verhalten jeweils vorliegt (es kann an der selben Polstelle links und rechts verschieden sein) ermitteln wir, indem wir uns die nähere Umgebung der Polstellen anschauen. Wir berechnen dazu Funktionswerte von Stellen, die unendlich-nah an der Polstelle liegen.

$$f(x_P+\epsilon)$$

$$f(x_P-\epsilon)$$

Das Vorzeichen dieser Funktionswerte gibt uns die gesuchte Information.

Beispiel 3.6.2 ($f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$)**.**
Die Polstellen sind $x_{P_1} = 2$ *und* $x_{P_2} = -2$*. Wir betrachten also*

$$\begin{aligned}
f(1,9999) &\approx -19997 &\Rightarrow&\quad \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = -\infty\\
f(2,0001) &\approx 20002 &\Rightarrow&\quad \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = +\infty\\
f(-2,0001) &\approx -20002 &\Rightarrow&\quad \lim_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} f(x) = -\infty\\
f(-1,9999) &\approx 19997 &\Rightarrow&\quad \lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} f(x) = +\infty
\end{aligned}$$

(vergleiche Abbildung 3.7)

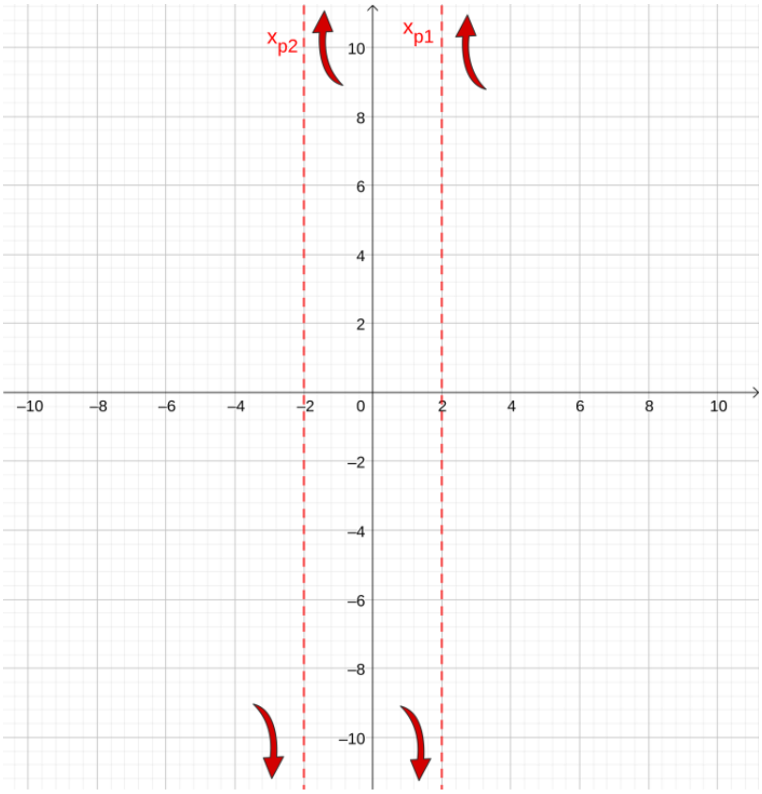

Abbildung 3.7: Verhalten an den Polstellen

3.7 Ableitungen

Die Ableitung einer gebrochen-rationalen Funktion berechnen wir mithilfe der Quotientenregel 2.6.6:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{(h(x))^2}$$

Bemerkung 3.7.1. *In gewissen Fällen.[1] kann es sinnvoll sein, vor dem Ableiten mit der Quotientenregel zunächst den abzuleitenden Funktionenquotienten mithilfe der Polynomdivision (siehe Abschnitt 2.5.6) zu vereinfachen. Hierbei wird allerdings, anders als bei der Nullstellenberechnung, kein vollständig gekürzter Bruch erwartet, da in der Regel die Zählerfunktion kein Vielfaches der Nennerfunktion ist. Es entsteht als Ergebnis vielmehr eine Zerlegung des Funktionenquotienten in einen ganz-rationalen Teil und einen gebrochen-rationalen Teil. (siehe Beispiel* **??***). Diese Zerlegung kann dann aufgrund der Summenregel (2.6.1) termweise abgeleitet werden, was den Rechenaufwand gerade bei zweiten und höheren Ableitungen deutlich verringert.*

[1] In der Regel dann, wenn wir uns in den Fällen 3 und 4 des Verhaltens im Unendlichen befinden

Beispiel 3.7.2 (Vergleich von normaler Ableitung und Ableitung nach Polynomdivision)**.**

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2}{x-1} \\
f'(x) &= \frac{2x \cdot (x-1) - (x^2 \cdot 1)}{(x-1)^2} \\
&= \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 2x + 1} \\
f''(x) &= \frac{(2x-2) \cdot (x^2 - 2x + 1) - (x^2 - 2x) \cdot (2x-2)}{(x-1)^4} \\
&= \frac{(2x-2) \cdot [x^2 - 2x + 1 - (x^2 - 2x)]}{(x-1)^4} \\
&= \frac{2x-2}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1} \\
f'(x) &= 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = 1 - \frac{1}{x^2 - 2x + 1} \\
f''(x) &= 0 + \frac{2x-2}{(x-1)^4} = \frac{2x-2}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}
\end{aligned}
$$

Die zweite Varainte benötigt hierbei weniger Rechenschritte insgesamt und weniger Termumformung als die obere Varainte um zum gleichen Ergebnis zu gelangen.

3.8 Extrempunkte, Wendepunkte und Sattelpunkte

Die Kriterien für Extrempunkte und Wendepunkte sowie Sattelpunkte sind identisch mit denen, die wir von der Kurvendiskussion ganz-rationaler Funktionen kennen (vergleiche Kapitel 2.7 und 2.8) Allerdings benutzen wir, um uns Rechenaufwand zu ersparen, bei den Wendepunkten stets das Vorzeichenwechselkriterium zum Prüfen der hinreichenden Bedingung.

3.9 Beispiel einer vollständigen Kurvendiskussion

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

Definitionsbereich und Nullstellen

Die Zählernullstelle ist x_1=0, die Nennernullstellen sind $x_{P_1} = 2$ und $x_{P_2} = -2$. Es gibt also keine Überschneidungen und somit keine hebbaren Lücken.

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-2; 2\}$$

Nullstellen: x_1=0

Symmetrieeigenschaften

Aufgrund des Exponentenkriteriums (2.2.4) sehen wir, dass die Zählerfunktion punktsymmetrisch ist, da alle ihre Exponenten ungerade sind. Die Nennerfunktion hingegen ist achsensymmetrisch, da alle ihre Exponenten gerade sind. Die Funktion f ist also punktsymmetrisch, da beide Teilfunktionen symmetrisch sind und ihr Symmetriety verschieden ist.

Verhalten im Unendlichen

Es liegt, da $n = 3$ und $m = 2$ ist der dritte Fall vor. Polynnomdivision liefert:

$$\begin{array}{l} \left(\quad x^3 \right) : \left(x^2 - 4 \right) = x + \dfrac{4x}{x^2 - 4} \\ \underline{-\, x^3 + 4x} \\ \qquad\;\; 4x \end{array}$$

$\Rightarrow$ die gesuchte Gleichung der schiefen Asymptote ist $a(x) = x$

der Restterm ist $r(x) = \dfrac{4x}{x^2 - 4}$.

y-Achsenabschnitt

$$f(0) = \frac{0^3}{0^2 - 4} = \frac{0}{-4} = 0$$

Verhalten an den Polstellen

Da der Graph der Funktion punktsymmetrisch ist, reicht es eine der Polstellen zu betrachten. Wir berechnen $f(2-\epsilon)$ und $f(2+\epsilon)$:

$$\begin{array}{rcl}
f(1,9999) \approx -19997 & \Rightarrow & \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = -\infty \\
f(2,0001) \approx 20002 & \Rightarrow & \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = +\infty \\
\textit{punktsymmetrie} & \Rightarrow & \lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} f(x) = -\infty \\
\textit{punktsymmetrie} & \Rightarrow & \lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} f(x) = +\infty
\end{array}$$

Ableitungen

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^3}{x^2-4} \\
f'(x) &= \frac{3x^2\cdot(x^2-4)-x^3\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = 3x^4-12x^2-2x^4(x^2-4)^2 \\
&= \frac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4-12x^2}{x^4-8x^2+16} \\
f''(x) &= \frac{(4x^3-24x)\cdot(x^4-8x^2+16)-[(x^4-12x^2)\cdot(4x^3-16x)]}{(x^2-4)^4} \\
&= \frac{4x^7-32x^5+64x^3-24x^5+192x^3-384x-[4x^7-16x^5-48x^5+192x^3]}{(x^2-4)^4} \\
&= \frac{8x^5+64x^3-384x}{(x^2-4)^4} = \frac{(8x^3+96x)(x^2-4)}{(x^2-4)^4} \\
&= \frac{8x^3+96x}{(x^2-4)^3}
\end{aligned}$$

Extrempunkte

NB:

$$f'(x) = \frac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \qquad x^4-12x^2 = x^2\cdot(x^2-12) \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_{E_{1/2}} = 0, \qquad x_{E_{3/4}} = \pm\sqrt{12}$$

HB:

$$f''(0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{kein Extrempunkt bei } x_{E_{1/2}} = 0$$

$$f''(\sqrt{12}) = \frac{3}{4}\sqrt{3} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{TP} = 0$$

$$f''(-\sqrt{12}) = -\frac{3}{4}\sqrt{3} < 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{HP} = 0$$

$$f(\sqrt{12}) = 3\sqrt{3} \qquad \Rightarrow \qquad \text{TP} = (\sqrt{12}|3\sqrt{3})$$

$$f(-\sqrt{12}) = -3\sqrt{3} \qquad \Rightarrow \qquad \text{HP} = (-\sqrt{12}| -3\sqrt{3})$$

Wendepunkte und Sattelpunkte

NB:

$$f''(x) = \frac{8x^3 + 96x}{(x^2 - 4)^3} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow 8x^3 + 96x = 8x \cdot (x^2 + 12) \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_{W_1} = 0$$

keine weiteren möglichen Wendestellen, da $x^2 + 12 \neq 0$.

HB:

Aufgrund von Punktsymmetrie liegt auf jeden Fall in $x_W = 0$ ein Vorzeichenwechsel vor. An der Stelle $x = 0$ besitzt f also die Steigung 0 und eine Wendestelle. Die y-Koordinate ist 0. (0|0) ist also ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente, also liegt bei (0|0) ein Sattelpunkt vor.

Schaubild

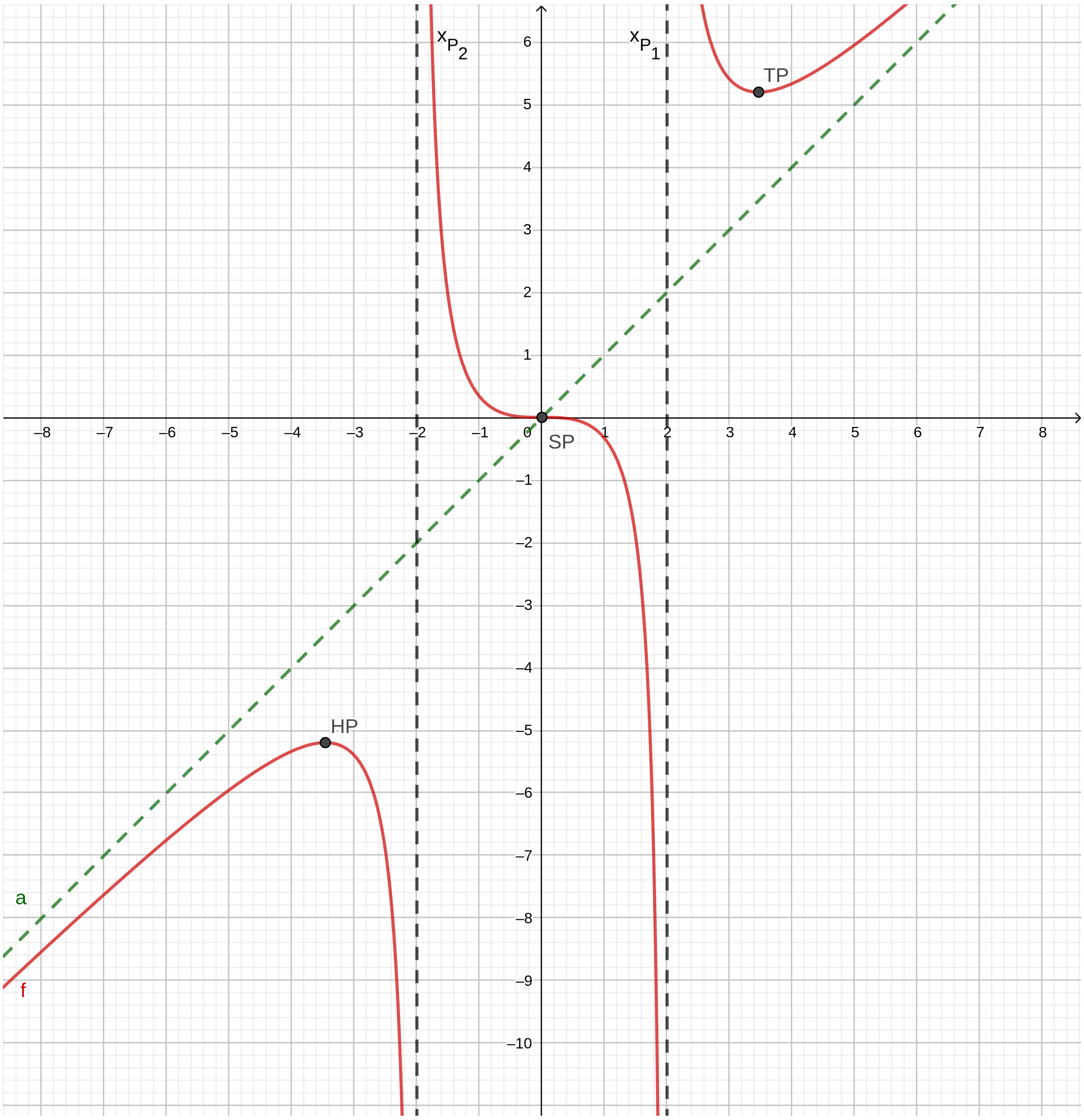

Abbildung 3.8: Schaubild $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$

Stichwortverzeichnis